

AKIL YÜRÜTMİYİ DESTEKLEYİCİ SINIF ORTAMI: ÖĞRETMEN KILAVUZU

TÜBİTAK 3501

Kariyer Geliştirme Programı

Proje No: 222K223

Proje Adı: Akıl Yürütmeyi Destekleyici Sınıf Ortamındaki
Öğrenci Katılım Biçimlerinin İncelenmesi

Proje Yürütücüsü: Doç Dr. Elçin EMRE AKDOĞAN

Araştırmacı: Dr. Çiğdem ALKAŞ ULUSOY

Bursiyerler: Ekin BALCI

Aleyanur AKBABA

Fatma Nur GÜRBÜZ

NİSAN 2025

ANKARA



İçindekiler

1. Akıl Yürütmeyi Destekleyecek Öğrenme Ortamının Oluşturulmasında Öğretmen Rolü.....	2
2. Akıl Yürütmeyi Destekleyecek Öğrenme Ortamının Oluşturulmasında Öğrenci Rolü.....	4
3. Diyalojik Öğrenme Ortamı.....	5
4. Görevler.....	8
5. Tetikleyici Sorular	39
6. Rubrikler.....	42
6.1. Öğrencilerin Matematiksel Akıl Yürütmelerini Değerlendirme Formu	43
6.2. Öğretmen Eylemleri Öz Değerlendirme Formu	44
7. Kaynakça.....	46

AKIL YÜRÜTMİYİ DESTEKLEYİCİ SINIF ORTAMI: ÖĞRETMEN KILAVUZU

Akıl yürütmeyi destekleyici sınıf ortamları, öğrencilerin yalnızca doğru sonuca ulaşmalarını değil, aynı zamanda matematiksel düşünme süreçlerini açıkça ifade etmelerini, farklı yaklaşımları sorgulamalarını ve düşüncelerini gerekçelendirmelerini teşvik eden ortamlardır. Bu tür öğrenme ortamları, öğrencilerin anlamlı öğrenme yaşantıları edinmelerini sağlarken, matematiksel düşünmenin doğasına dair daha derin bir farkındalık geliştirmelerine de olanak tanır. Böyle bir ortamın oluşturulabilmesi, öğretmenin süreci dikkatle planlamasını, öğrenci katılımını teşvik etmesini ve etkileşimi destekleyecek araçlar ile matematiksel görevleri dikkatli ve bilinçli bir şekilde seçmesini gerektirir. Aynı zamanda öğrencilerin aktif katılım gösterdiği, fikirlerini özgürce ifade edebildiği ve birlikte düşünmenin değer gördüğü bir sınıf kültürünün inşasını da içerir. Bu kılavuz, öğretmenlerin akıl yürütmeyi teşvik eden sınıf ortamlarını yapılandırmalarına rehberlik etmeyi amaçlamakta; bu doğrultuda, böyle bir ortamın oluşturulmasında dikkate alınması gereken altı temel bileşene yer vermektedir.

1. Akıl yürütmeyi destekleyecek öğrenme ortamının oluşturulmasında öğretmen rolü
2. Akıl yürütmeyi destekleyecek öğrenme ortamının oluşturulmasında öğrenci rolü
3. Diyalojik öğrenme ortamı
4. Görevler
5. Tetikleyici Sorular
6. Rubrikler

1. Akıl Yürütmeyi Destekleyecek Öğrenme Ortamının Oluşturulmasında Öğretmen Rolü

Akıl yürütmeyi destekleyici sınıf ortamında öğretmenin rolü, yalnızca bilgi aktarımı yapan bir figür olmaktan çıkıp, öğrenme sürecini kolaylaştıran bir rehber dönüşür. Bu bağlamda öğretmenin temel görevi, öğrencilerin matematiksel fikirlerini keşfetmelerine ve bu fikirleri açıkça ifade edebilmelerine olanak tanıyacak bir söylem ortamı oluşturmaktır. Öğretmen, planlama sürecinden itibaren öğrenci düşüncelerini merkeze alır, onların vereceği olası tepkileri öngörerek ders planını şekillendirir.

Akıl yürütmeyi destekleyen bir öğrenme ortamının oluşturulmasında temel rol üstlenen öğretmenlerin sınıf içindeki eylemlerini anlamak ve bu doğrultuda onlara rehberlik edecek öğretmen eylemlerini tanıtmak, öğretmenlerin kendi uygulamalarını gözden geçirmeleri açısından büyük önem taşımaktadır. Bu kapsamda, Erath ve arkadaşlarının (2021) tanımladığı öğretmen eylemleri (ÖE1–ÖE6), öğretmenin bu süreçteki rolünü daha somut ve anlaşılır hale getirmektedir.

- ÖE1: Öğretmen, matematiksel kavramlara odaklanan toplu tartışmalar planlar. Görevleri önceden seçer, öğrenci tepkilerini öngörür ve bu planları epistemik işlevlere göre düzenler.
- ÖE2: Öğrencilerin fikirlerini anlamaya çalışır, onların düşüncelerine duyarlı olur ve bu fikirleri tüm öğrenciler için erişilebilir kılar.
- ÖE3: Dil gelişimini desteklemek için öğrenci konuşmalarını yeniden ifade eder, soruları açıklığa kavuşturur ve uygun temsiller kullanır.
- ÖE4: Öğrencileri açıklamaya, tartışmaya ve gerekçe göstermeye teşvik eder. Katılımı sadece niceliksel değil, niteliksel olarak zenginleştirmeyi hedefler.
- ÖE5: Öğrenci düşüncelerine yapıcı geri bildirim verir, hataları öğrenme fırsatına çevirir ve değerlendirmeyi ortak bir süreç haline getirir.
- ÖE6: Sessizlik ve bekleme süresini bilinçli olarak kullanarak öğrencilere düşünme ve yanıtlarını yapılandırma fırsatı tanır.

Örneğin ÖE1, tartışma ortamını uygun görevlerle yapılandırmayı; ÖE2 ise öğrenci fikirlerine duyarlılık göstermeyi ve bu fikirleri tüm sınıf için erişilebilir hale getirmeyi

içerir. Öğretmen, öğrencilerin söylediklerini yalnızca “duyan” değil, onları anlamlandıran ve üzerine yeniden söylem inşa eden bir konumdadır.

Ayrıca, öğretmenin sorduğu tetikleyici sorular öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini harekete geçirir. Bu sorular genellikle açık uçlu olup öğrencinin “neden bu yolu seçtin?”, “bu çözüm başka nasıl düşünülebilir?” gibi sorularla düşünmesini sağlar. Böylece öğretmen, öğrencinin kendi düşünme yollarını fark etmesine katkıda bulunur.

Öğretmenin dikkat etmesi gereken diğer bir unsur da sınıf içinde öğrenciler arasında iş birliğini teşvik eden ve fikirlerin çatışmasına alan tanıyan bir atmosfer kurmaktır. Bu atmosferde hata yapmak öğrenmenin doğal bir parçası olarak görülür. Öğretmen, duraklamaları ve sessizliği stratejik olarak kullanarak öğrencinin düşünmesine zaman tanır (ÖE6). Aynı zamanda öğretmen, öğrencinin söylediklerini yeniden formüle ederek (ÖE3) onların matematiksel ifadelerini netleştirmelerine yardımcı olur.

Sonuç olarak, akıl yürütmeyi destekleyen bir sınıf ortamında öğretmen, yalnızca bilgi aktaran biri değil; aynı zamanda düşünmeyi teşvik eden, öğrencilerin fikirlerini duyarlılıkla yönlendiren, sınıf söylemini zenginleştiren ve öğrencilerin söylemsel katılım biçimlerini dönüştürebilen etkili bir rehberdir.

2. Akıl Yürütmeyi Destekleyecek Öğrenme Ortamının Oluşturulmasında Öğrenci Rolü

Akıl yürütmeyi destekleyen sınıf ortamlarında öğrencinin rolü, pasif bilgi alıcısından aktif bir matematiksel düşünür ve iletişim kurucuya doğru evrilir. Bu tür ortamlarda öğrenciler yalnızca işlemsel bilgiyle yetinmeyip, kendi matematiksel fikirlerini geliştirir, sorgular ve arkadaşlarıyla paylaşarak bu fikirleri yapılandırır. Öğrenci, kendi öğrenmesinin sorumluluğunu üstlenerek öğretmen ve akranlarıyla aktif bir söylem içinde bulunur.

Matematiksel Biliş İletişimsel Yaklaşım teorisine göre, öğrencinin matematiksel öğrenmesi, söyleme katılım biçimlerinin değişimi ve/veya dönüşümüyle gerçekleşir (Sfard, 2008). Bu bağlamda, öğrenci matematiksel kavramları öğrenirken önce ritüel tarzda yani öğretmeni taklit ederek katılım gösterebilir. Ancak zamanla, özellikle uygun görevler ve öğretmen yönlendirmesiyle bu katılım biçimi keşfedici rutinlere dönüşür. Keşfedici rutinler, öğrencinin problemi analiz etmesi, çözüm önerileri geliştirmesi, gerekçeler sunması ve farklı bakış açılarını değerlendirmesiyle açıklanabilir.

Ayrıca, öğrencinin akıl yürütme sürecinde kullandığı iletişim stratejileri (örneğin; tekrar sorma, fikirlerini temsil etme, başkasının ifadesini yeniden yapılandırma) söylemin zenginleşmesini sağlar. Bu iletişim biçimleri, öğrenci-görev etkileşimi kadar öğrenci-öğretmen ve öğrenci-öğrenci etkileşiminde de önemlidir. Öğrenci, sadece çözüm bulmakla kalmaz, aynı zamanda neden bu çözümü seçtiğini ve bunun hangi matematiksel ilkelere dayandığını da açıklar.

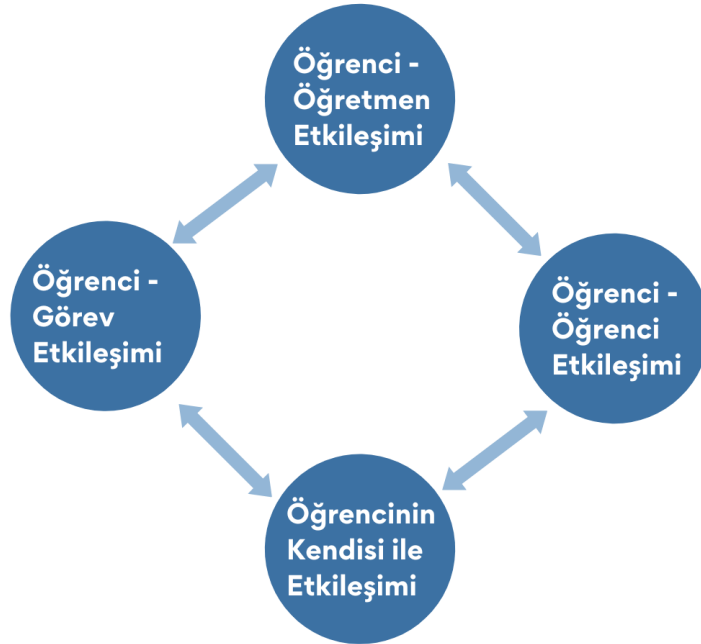
Böyle bir ortamda öğrenciler, matematiği yalnızca sonuçlarıyla değil, süreçleriyle de anlamlandırır. Bu anlamlandırma süreci, öğrencinin kendisiyle kurduğu içsel diyalog sayesinde daha da derinleşir. Öğrenci, matematiksel düşünmeyi bir iletişim biçimi olarak kavradıkça, soyut kavramları içselleştirir ve öğrenmeyi sürdürülebilir hale getirir. Sonuç olarak, öğrenci bu ortamda yalnızca matematik öğrenmez; aynı zamanda matematiksel düşünmeyi, gerekçelendirmeyi ve anlamlı iletişim kurmayı da öğrenir.

3. Diyalojik Öğrenme Ortamı

Matematiksel kavramların ve içerik bilgisinin öğretilmesi önemli olmakla birlikte bunların öğretimi ile matematiksel süreç becerilerinin de öğrencilere kazandırılması gereklidir (MEB, 2018). Böylece öğrencilere sadece içerik bilgisini değil, genç bir matematikçi gibi akıl yürütmeyi, sorgulamayı ve analitik düşünmeyi de öğrenme olanağı sunmuş oluruz. Böylelikle, öğrenciler, gelecekteki öğrenme için iyi hazırlanmış olacaklar ve günlük yaşamda matematiksel süreçleri kullanma konusunda çok yetkin olacaklardır (AAMT, 2016). Akıl yürütme, iletişim gibi matematiksel süreç becerisi olan becerilerin eksikliği matematik öğrenmede zorluk yaşanmasının yanı sıra sosyal hayatta da olayları düşünme ve süzgeçten geçirebilme ve ifade edebilme becerilerinde de eksiklikler yaşanmasına neden olabilecektir. 2023 Eğitim vizyon belgesinde de vurgulandığı üzere, son yıllarda 21. yüzyıl becerileri olarak adlandırılan yaratıcılık, iletişim, takım çalışması, akıl yürütme gibi becerilerin kazanılması eğitim yaklaşımlarının ve öğrenmenin önemli bir bileşenidir (MEB, 2018). İletişim becerisi ise ulusal ve uluslararası programlarda da vurgulandığı üzere öğrencilerin matematiği anlamlandırma aşamasında ve akıl yürütmede önemli bir role sahiptir (MEB, 2018; NCTM, 2000). Matematiksel kavramlar, semboller, formüller veya argümanlar hakkında konuşabilen veya cümle içinde kullanabilen bir öğrenci matematiksel fikirleri iletişim aracı olarak kullanabilmektedir. İletişim kurmak oldukça kolay görünse de kendine ait argümanları, kuralları, formülleri olan matematiği bir iletişim aracı olarak kullanmak öğrenciler için zorlayıcı olabilmektedir (Sfard, 2008). Öğrencilerin matematiği bir dil olarak algılamaları için sadece yazılan bir işlemsel problemi çözmeleri ya da benzer görevler üzerine çalışmaları yeterli değildir. Matematiğin kendine ait olan argümanlarının ve doğasının farkına varmaları gerekmektedir. Dolayısıyla, öğrencilerin matematiği anlaması ve matematiksel fikirleri iletişim aracı olarak kullanabilmeleri için matematiksel argümanları kullanabilmeleri, akıl yürütmeleri, formal ispatı yapabilmeleri ve değerlendirebilmeleri gerekmektedir (Martin vd., 2005). Akıl yürütme TIMSS başarı testlerinde matematik öğrenme alanında öğrencilerden beklenen bilişsel becerilerden biridir (TIMMS, 2019). Mantıksal ve sistematik düşünmeyi içeren akıl yürütme becerisini kullanmak için de iletişim becerisi gerekmektedir. İletişim becerisi, öğrencileri öğretimdeki ortaklığa taşıyacak en önemli öğelerden birisidir. 1960’larda öğretimdeki bireysellik vurgusu artık yerini öğretimdeki ortaklığa (collectivisation of teaching) bırakmıştır (Sierpinska, 2005). Bu ortaklıkta; öğrencilerin matematiksel bir problemle uğraşırken sınıf içindeki tartışmalara katılım biçimi de kritik bir öneme sahiptir (Sfard, 2018). Bu bağlamda

sınıf içindeki iletişimin kuvvetli olduğu bir sınıf ortamındaki öğretmenin rolünün de oldukça önemli olduğu söylenebilir.

Öğretmen rolünün önemi ile birlikte, akıl yürütmeyi destekleyen bir sınıf ortamının oluşturulmasında belirli koşullar öğrencilerin anlamlı öğrenmesini desteklemektedir. Bu koşullar şöyle sıralanabilir: (a) zorlanan ve derse aktif katılım sağlayan öğrenciler, (b) öğrencilerin matematiksel fikirler geliştirmelerini destekleyen gözlemci öğretmenler; (c) öğrencilerin seviyesine uygun, çözüm üretebilecekleri ve çözümlerini gerekçelendirebilecekleri açık uçlu görevler; (d) öğrencilerin birbirleri ile iş birlikleri; (e) öğrenci fikirlerine, varsayımlarına açık bir öğrenme ortamı (Mueller vd., 2014). Bir sınıf ortamında bu koşullar sağlandığında, öğrenciler problem çözme becerilerini veya ispat süreçlerini gerekçelendirmeyi geliştirirler (Martino & Maher, 1999; Yackel & Hanna, 2003). Bu şekilde oluşturulan akıl yürütmeyi destekleyen bir sınıf ortamında öğretmen de önemli bir role sahiptir. Öğretmenin özellikle öğrencilerin argüman geliştirmelerini desteklemek amacıyla onlara hemen cevap vermeye hazır olması beklenmektedir (Mueller vd., 2014).



Şekil-1. Diyalojik öğrenme ortamı kriterleri

Şekil-1’de verilen döngüsel şemanın diğer bileşenleri ise Öğrenci-Öğretmen/ Öğrenci-Öğrenci Etkileşimi ile Öğrenci-Görev Etkileşimidir. Bu bileşenlerin ilişkin iletişim biçimleri aşağıda verilmiştir.

A. Öğrenci-Öğretmen/ Öğrenci-Öğrenci Etkileşimi: Aşağıdaki bileşenler diyalojik öğrenme ortamında etkili iletişim (zengin söylem oluşturma) kurabilmek için hem öğretmenin hem de öğrencilerin kullanmaları gereken iletişim biçimleridir. Bu iletişim biçimleri gerek öğrenci-öğretmen gerekse öğrenci-öğrenci etkileşimlerinde görülmektedir (Lave ve Wenger, 1991).

1. Etkili dinleme
2. Cevapları/ifadeleri tekrar edilmesini isteme
3. Cevapları/ifadeleri başka bir formda/temsili yoluyla yeniden söyleme
4. Öğrenci/öğretmen ifadelerini tekrarlama
5. Önemli fikirleri ön plana çıkarma
6. Odakta kalma, odağın dağılması durumunda matematiksel söylemlere yönelme

B. Öğrenci-Görev Etkileşimi: Aşağıdaki bileşenler öğrencilerin görev ile etkileşime girerken diyalojik öğrenme ortamında etkili iletişim (zengin söylem oluşturma) kurabilmeleri için öğrencilerin kullanmaları gereken iletişim biçimleridir.

- Görevin anlaşılması için strateji kullanma (görev yönergesini okumak, görev yapısını farklı temsil biçimleri ile göstermek vs.)
- Bireysel iletişim (öğrencinin görev üzerine çalışırken, görevin tamamlanmasına ilişkin çaba gösterirken kendisiyle kurduğu iletişim)
- Bireysel iletişim sırasında görev ile ilgili ön bilgilerini ve geçmiş öğrenmelerini yoklama
- Bireysel iletişim sırasında görev ile ilgili ihtiyaç duyduğu yeni bilgiyi fark etme

4. Görevler

Akıl yürütmeyi destekleyici sınıf ortamının önemli bileşenlerinden birisi öğretmenin sınıfta uyguladığı görevlerdir. Zorlayıcı ve açık uçlu görevler öğrencilerin farklı çözüm yolları bulmalarını sağlamaktadır (Francisco & Maher, 2005). Ayrıca görevler öğrenciler için alıılmamı bir durum olduğu için basit prosedürlerle çözüme ulaamadıklarından dolayı matematiksel düşünme becerilerini zorlamalarını gerektirmektedir (Mueller vd., 2014). Öğretmen, görevleri öğrencilere verdikten sonra, öğrencileri kendi fikirlerini oluşturmaları ve gerekçelendirmelerini kurmaları için cesaretlendirmelidir. Ayrıca ğretmenlerin iyi birer gözlemci olup, öğrencilerin akıl yürütmelerini teşvik edici sorular sorması gerekmektedir. Bu bağlamda bir görevin tek başına verilmesi çok anlamlı olmamaktadır, öğretmenin öğrenciler görev üzerine çalışırken soracağı tetikleyici sorular kritik öneme sahiptir.

Görev Kodu: Görev A1.0	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

NOKTA

DOĞRU

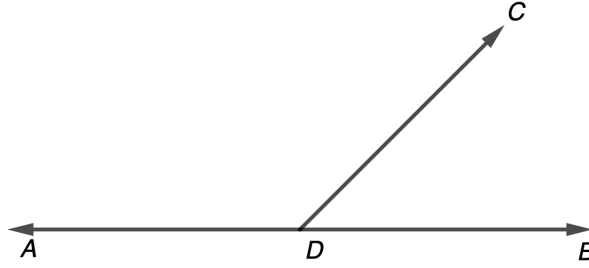
DÜZLEM

Görev Kodu: Görev A1.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

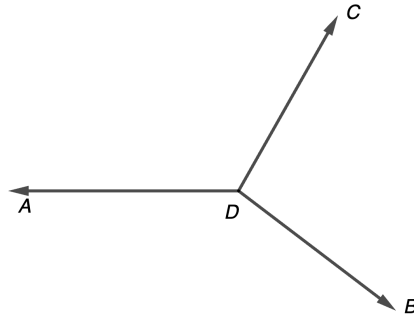
Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

1.



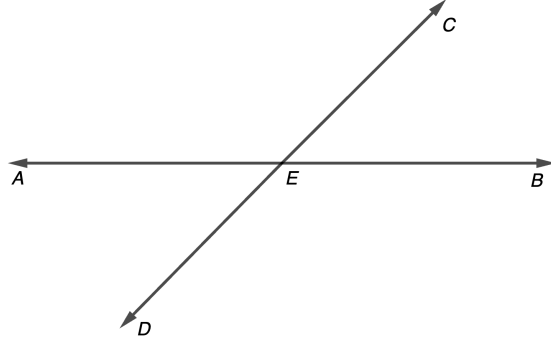
Önerme	Neden
$m(\hat{ADC}) + m(\hat{BDC}) = 180^\circ$	

2.



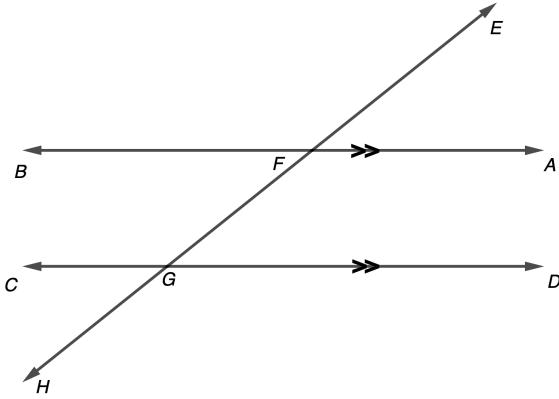
Önerme	Neden
$m(\hat{ADC}) + m(\hat{CDB}) + m(\hat{BDA}) = 360^\circ$	

3.



Önerme	Neden
$m(\hat{AED}) = m(\hat{CEB})$	

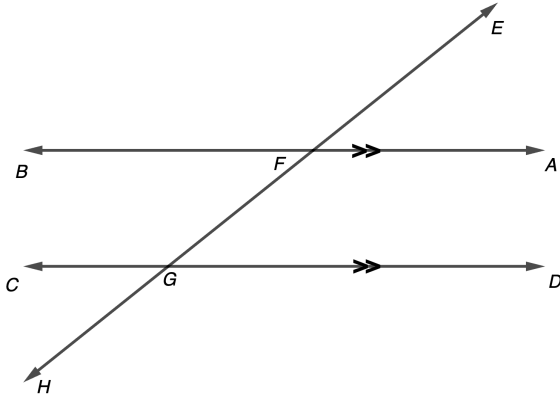
4.



BA//CD olduğuna göre

Önerme	Neden
$m(\hat{AFG}) = m(\hat{DGH})$	

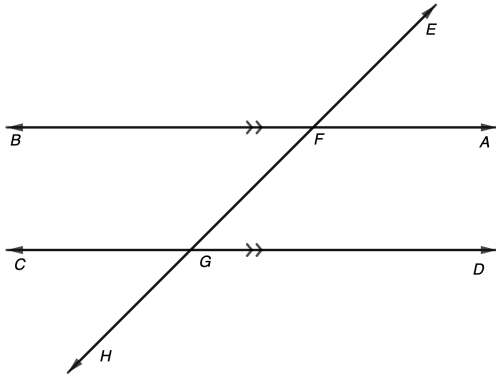
5.



BA//CD olduğuna göre

Önerme	Neden
$m(\hat{BFG}) = m(\hat{FGD})$	

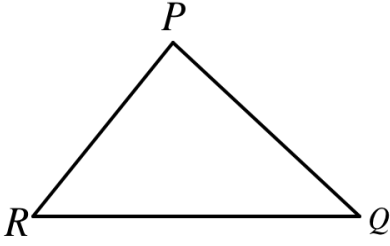
6.



BA//CD olduğuna göre

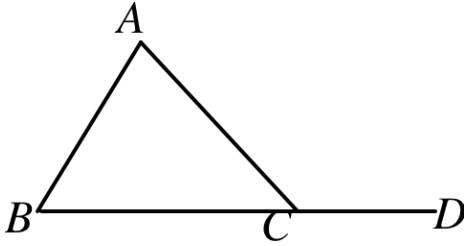
Önerme	Neden
$m(\hat{BFG}) + m(\hat{FGC}) = 180^\circ$	

7.



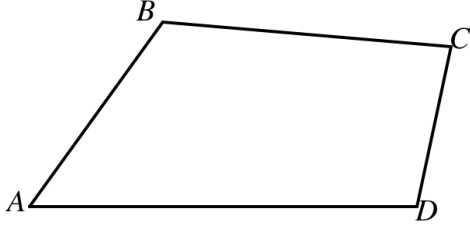
PRQ bir üçgen olduğuna göre
 $m(\hat{P}) + m(\hat{Q}) + m(\hat{R}) = 180^\circ$ olduğunu
ispatlayınız.

8.



ABC bir üçgen olduğuna göre
 $m(\hat{ACD}) = m(\hat{A}) + m(\hat{B})$ olduğunu
ispatlayınız.

9.



ABCD bir dörtgen olduğuna göre
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ olduğunu
ispatlayınız.

Görev Kodu: Görev A2.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Aşağıda verilen terimleri tanımlayınız.

Doğru Parçası:

Işın:

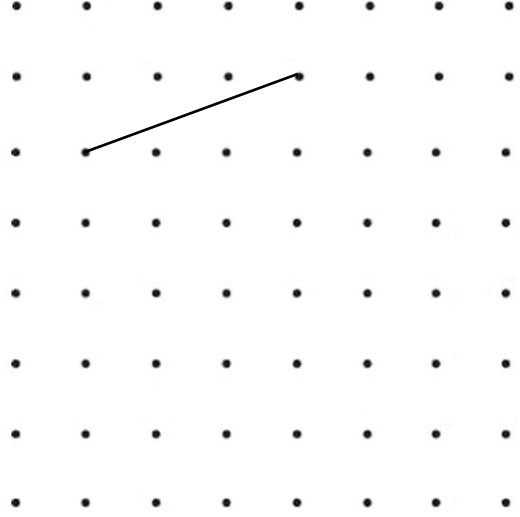
Açı:

Üçgen:

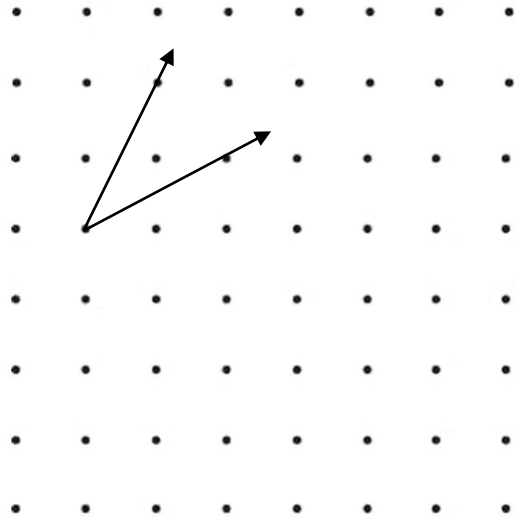
Görev Kodu: Görev A2.2	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Eşlik nedir? Açıklayınız.

Doğru parçalarının eş olması ne demektir? Verilen doğru parçasına eş en az iki doğru parçası çiziniz.

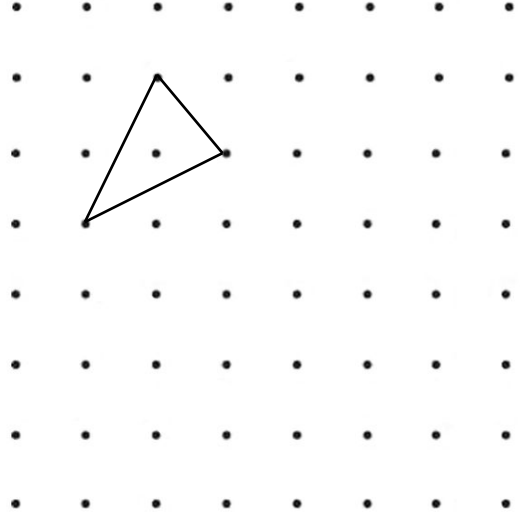


Açıların eş olması ne demektir? Verilen açığa eş en az iki açı çiziniz.



Görev Kodu: Görev A2.3	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

İki üçgenin eş olması ne demektir? Açıklayınız. Verilen üçgene eş en az iki tane eş üçgen çiziniz.



İki üçgenin eş olması için gerek ve yeter koşullar üretiniz. Ürettiğiniz koşulların doğruluklarını ispatlayınız.

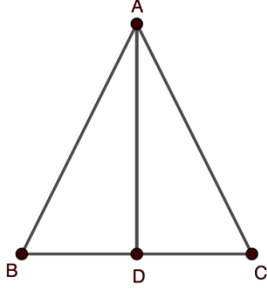
Görev Kodu: Görev A3.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

1.

a)



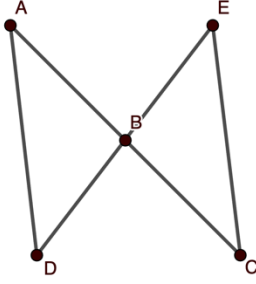
ABC ikizkenar üçgendir. $[AB] = [AC]$ ve $[AD]$ kenarortay
 $\triangle \quad \triangle$
 olduğuna göre $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ ve $\hat{B} \cong \hat{C}$ olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

b) Bu ispattan başka hangi sonuç(lar) çıkarılabilir?

2.

a)



$[AC]$ ve $[DE]$ birbirlerini B noktasında iki eşit parçaya böldüğüne göre $[AD] \cong [EC]$ olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

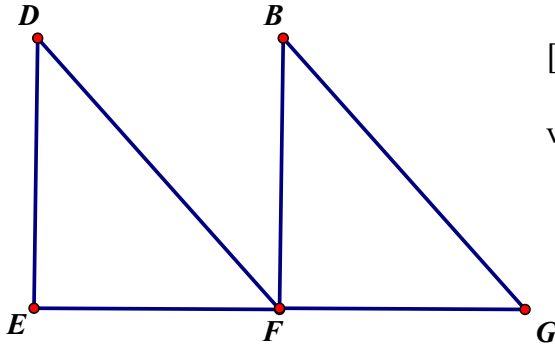
b) Bu ispattan başka hangi sonuç(lar) çıkarılabilir?

Görev Kodu: Görev A3.2	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

1.

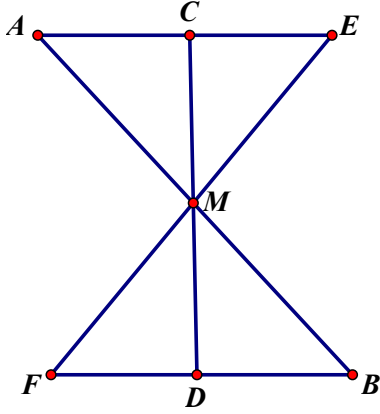


$[DE] \perp [EG]$ ve $[BF] \perp [EG]$, F ise $[EG]$ 'nin orta noktası
 Δ Δ
ve $[DF] \parallel [BG]$ olduğuna göre $\Delta DEF \cong \Delta BFG$ ispatlayınız.

Δ Δ
 DEF ve BFG üçgenlerinde;

Önerme	Neden
a. $[DE] \perp [EG]$	
b. $[BF] \perp [EG]$	
c. F, $[EG]$ nin orta noktası	
d. $[DF] \parallel [BG]$	
e. $\widehat{DFE} \cong \widehat{BGF}$	
f. $\Delta DEF \cong \Delta BFG$	

2.



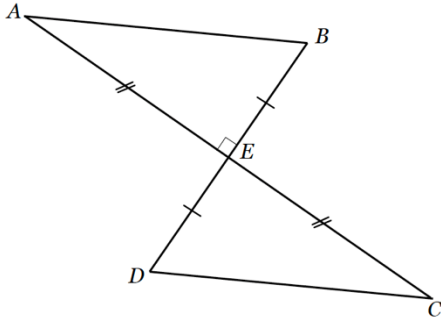
M, $[AB]$ ve $[CD]$ nin orta noktası olduğuna göre $|EM| = |FM|$ olduğunu kanıtlayınız.

Önerme	Neden
a. M, $[AB]$ ve $[CD]$ nin orta noktası	
b. $ MA = MB $	
c. $ CM = MD $	
d. $\widehat{DMB} \cong \widehat{CMA}$	
$\triangle$ $\triangle$ e. $DMB \cong CMA$	
f. $\widehat{FMD} \cong \widehat{EMC}$	
g. $\widehat{FMB} \cong \widehat{EMA}$	
$\triangle$ $\triangle$ h. $FMB \cong EMA$	
i. $ EM = FM $	

Görev Kodu: Görev A3.3	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

1. Aşağıda verilen ispatı analiz ediniz. Doğru mu? İspatta bir hata varsa açıklayın ve düzeltin.



$[AE] = [EC], [BE] = [DE]$ ve $[AC] \perp [BD]$ olduğuna göre

$\triangle$ $\triangle$

- $ABE \cong CDE$ olduğunu ispatlayınız.
- $[AB] \parallel [DC]$ olduğunu ispatlayınız.

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDE \text{ (AKA)}$$

b) $AB = DC$ (eş üçgenlerin eşlezen kenarları)

$$\therefore AB \parallel DC$$

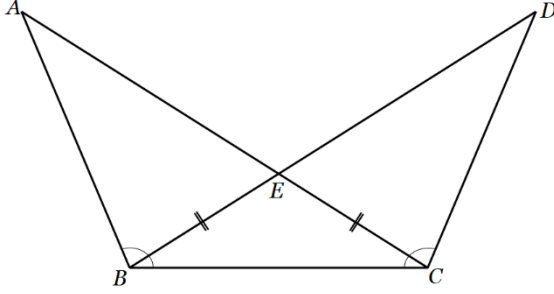
a) ABE ve DEC üçgenlerinde

$$1. AE = EC \text{ (verilen)}$$

$$2. BE = ED \text{ (verilen)}$$

$$3. \hat{AEB} = \hat{DEC} \text{ (karşıt dik)} \\ = 90^\circ \text{ (verilen)}$$

2. Aşağıda verilen ispatı analiz ediniz. Doğru mu? İspatta bir hata varsa açıklayın ve düzeltin.



$\widehat{ABC} \cong \widehat{DCB}$ ve $[BE] \cong [CE]$ olduğuna göre

- $\triangle$ $\triangle$
a. ABC ve DCB nin eş üçgenler olduğunu ispatlayınız.
b. $|AE| = |DE|$ olduğunu ispatlayınız.

a) $\hat{A}BC = \hat{D}CB$ (verilen)

$\overline{BE} = \overline{EC}$ (verilen)

$\overline{BC}$ ortak

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$ (KAK)

b) $AE = DE$ (eş üçgenlerin eşleşen kenarları)

Görev Kodu: Görev A4.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri nedenlerinin bir özeti olarak saklayın.

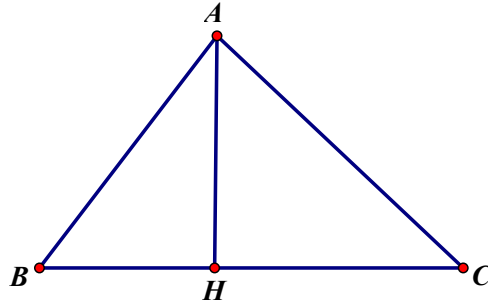
Aksiyom 1: Her çokgensel bölgeye karşılık gelen reel bir sayı vardır.

Aksiyom 2: Eş üçgenler eşit alanlara sahiptir.

Aksiyom 3: Eğer bir R bölgesi iki ayrık A ve B bölgesinin birleşimi ise, A ve B bölgelerinin alanları toplamı R'ye eşittir.

Aksiyom 4: Bir dikdörtgenin alanı, uzunluğu ve genişliğinin çarpımıdır.

Her bir ifadenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.



ABC bir üçgen ve $|AH|$ ve $|BC|$ birbirlerine dik olduğuna göre $A(ABC) = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

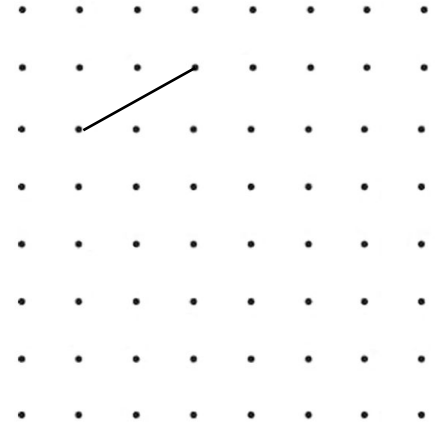
Görev Kodu: Görev A5.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

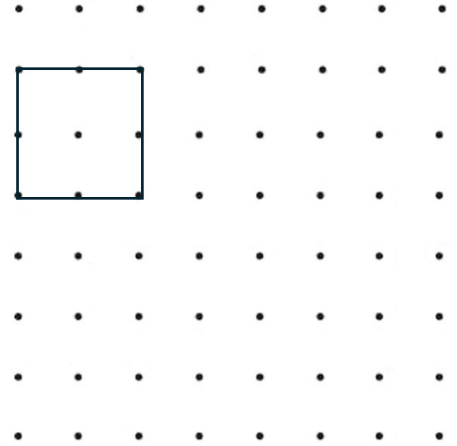
Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

Sizce iki geometrik şeklin benzer olması ne anlama gelir? Açıklayınız.

Verilen doğru parçasına benzer en az iki doğru parçası çiziniz.

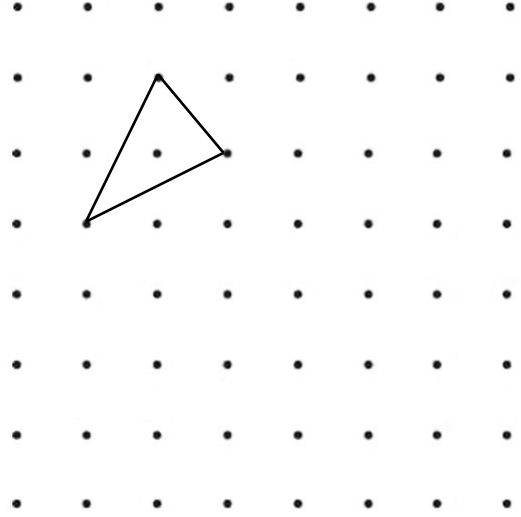


Verilen kareye benzer bir kare en az iki kare çiziniz.



Görev Kodu: Görev A5.2	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

a. İki üçgenin benzer olması ne demektir? Açıklayınız. Verilen üçgene benzer en az iki tane üçgen çiziniz.



b. İki üçgenin benzer olması için gerek ve yeter koşullar üretiniz.

c. İki öğrenci arasında şöyle bir konuşma geçmektedir:

Ahmet: İki benzer üçgenin yükseklikleri arasındaki oran, benzerlik oranına eşittir.

Gölce: Bu her zaman doğru olmayabilir.

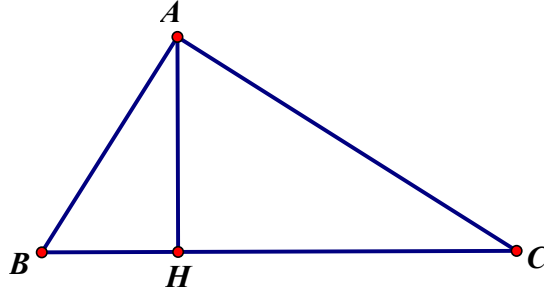
i. Ahmet ve Gölce'nin söylemlerini doğruluk bakımından değerlendiriniz. Doğru bulduğunuz söylemin ispatını veriniz.

ii. Bu değerlendirmeden yola çıkarak, başka ne tür çıkarımlarda bulunabilirsiniz?

Görev Kodu: Görev A5.3	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.



ABC bir üçgendir. $|BA| \perp |CA|$ ve $|AH| \perp |BC|$ olduğuna göre $|AH|^2 = |BH| \cdot |HC|$ olduğunu ispatlayınız.

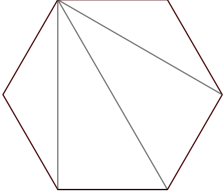
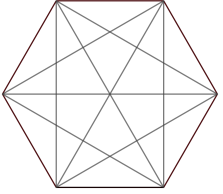
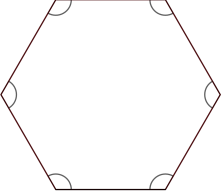
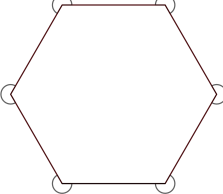
Önerme	Neden

Görev Kodu: Görev A6.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

1. Aşağıdaki tabloyu tamamlayınız.

				
Kenar Sayısı	Bir Köşesinden Çizilen Köşegen Sayısı	Toplam Köşegen Sayısı	İç Açılar Toplamı	Dış Açılar Toplamı
3				
4				
5				
⋮				
n	(i)	(ii)	(iii)	(iv)

- a) (i) nin n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

- b) (ii) nin n kenarlı bir çokgenin toplam köşegen sayısı olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

c) (iii) nin n kenarlı bir çokgenin iç açıları toplamı olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

d) (iv) nin n kenarlı bir çokgenin dış açıları toplamı olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

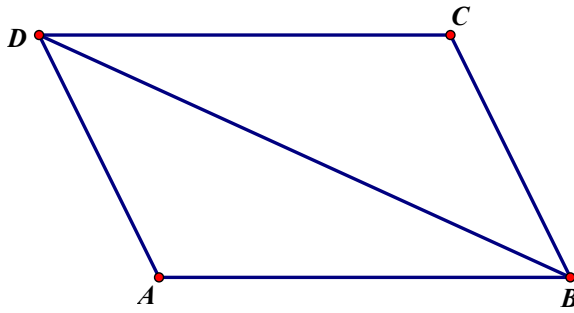
Görev Kodu: Görev A7.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

Paralelkenar: Paralelkenar, kenarları birbirine paralel olan iki boyutlu bir geometrik şekildir.

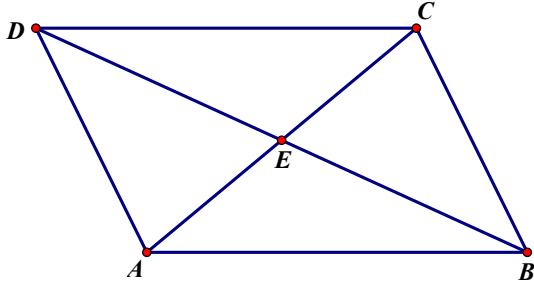
1)



ABCD bir paralelkenar olduğuna göre karşılıklı kenarlarının uzunlarının eşit olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden
$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DBC})$	
$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDC})$	
$ABD \cong CDB$	
$ AB = DC $	
$ AD = BC $	

2)



ABCD bir paralelkenardır. $[AC]$ ve $[BD]$ bu paralelkenarın köşegenleri olduğuna göre bu köşegenlerin birbirlerini iki eşit parçaya böldüğünü ispatlayınız.

Önerme	Neden

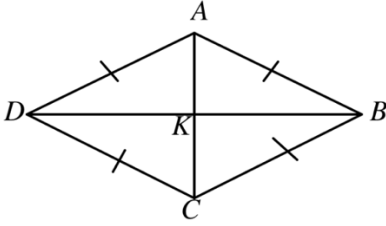
Görev Kodu: Görev A7.2	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

Eşkenar dörtgen: Dört eşit kenarı olan bir dörtgendir.

1)



ABCD bir eşkenar dörtgen olduğuna göre $[AC] \perp [BD]$ olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden
$ DK = BK $	
$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{BAK})$	
$[AC] \perp [BD]$	

Görev Kodu: Görev A7.3	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

1)



ABCD bir dikdörtgendir. Bir dikdörtgeni tanımlamak için gereken minimum koşulları neden vererek listeleyiniz.

--

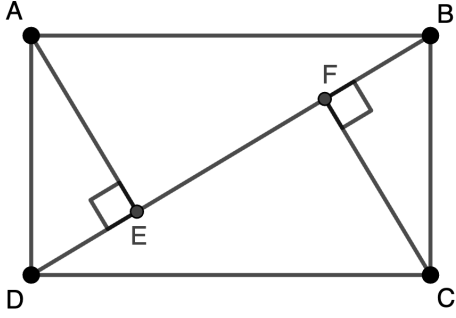
2)



ABCD bir dikdörtgendir. ABCD dikdörtgeninin köşegenlerinin eş olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

3)



ABCD bir dikdörtgendir ve $[BD]$ bu dikdörtgenin köşegenidir.

$[AE] \perp [BD]$ ve $[CF] \perp [BD]$ olduğuna göre

Δ

Δ

ADE üçgeninin CBF üçgenine eş olduğunu ispatlayınız.

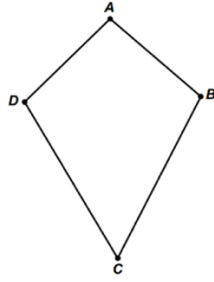
Önerme	Neden

Görev Kodu: Görev A8.1	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

Deltoid: Deltoid, 2 çift eşit uzunlukta kenarı olan ve bu kenarların birbirine bitişik olduğu bir dörtgendir.



ABCD bir deltoiddir.

$|AD| = |AB|$ ve $|DC| = |CB|$ olduğuna göre
 $\widehat{ADC} \cong \widehat{ABC}$ ispatlayınız.

a) Verilenleri kullanarak ispatı oluşturmak için bir sonraki şekle hangi yardımcı eleman(lar)ı eklemeliyiz??

--

b)

Önerme	Neden

c) İspat herhangi bir yardımcı unsur eklemekten yapılabilir mi?

--

Görev Kodu: Görev A8.2	Tarih:
Öğrenci Adı:	Grup Adı:

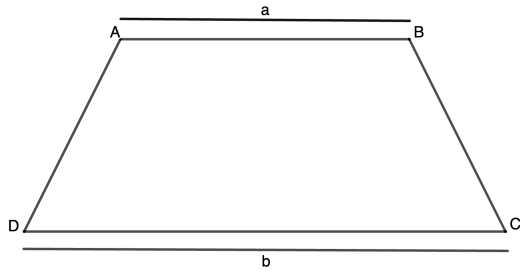
Bu sayfayı geometri ispatlarınızın bir özeti olarak saklayın.

Her bir önermenin nedenlerini vererek aşağıdakileri tamamlayın.

Tanım 1: Yamuk, en az bir çift paralel kenarı olan bir dörtgendir.

Tanım 2: Yamuk, tam olarak bir çift paralel kenarı olan bir dörtgendir.

1)



ABCD is bir yamuk olduğuna göre

$A(ABCD) = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$ olduğunu ispatlayınız.

Önerme	Neden

5. Tetikleyici Sorular

Akıl yürütmeyi destekleyici sınıf ortamının önemli bileşenlerinden birisi öğretmenin görevleri uygularken sınıfta kullandığı tetikleyici sorulardır. Öğretmenlerin öğrenciler bir problem ya da görev üzerine çalışırken soracağı tetikleyici sorular; onların kendi akıl yürütmelerinin ve matematiksel düşüncelerinin farkına varmaları için kritik bir öneme sahiptir (Moyer & Milewicz, 2002).

Öğretmenler ilk başta standart olmayan sorular sorduğunda öğrenciler şaşkına dönebilmekte fakat bir süre sonra öğretmen direk olarak bu soruları sormasa bile öğrenciler kendi kendilerine bu soruları sorabilmektedirler (Mason, 2000). Öğrencilerin kendilerine soru sorabilmesinin de onların matematiksel akıl yürütmelerini geliştirmek için önemli bir fırsat olduğu söylenebilir. Mason (2000), öğrencilerin görevler içinde çalışırken fazla odaklandıklarından üst bir bakış açısına ya da soruya ihtiyaç duyduklarını “Şimdi sana hangi soruyu soracağım?” sorusunun onların kendi akıl yürütmelerine farklı bir bakış açısı ile bakmalarını sağlayacağını vurgulamaktadır.

Öğretmenler, tetikleyici soruları farklı bağlam ve durumlarda etkili bir şekilde kullanarak öğrencilerin düşünme süreçlerini derinleştirebilirler. Bu sorular, özellikle aşağıdaki durumlarda bir araç olarak işlev görmektedir (Tablo-1):

- **Gerekçe sorgulama:** Öğrencilerin yalnızca bir sonuca ulaşmalarını değil, ulaştıkları sonucun ardındaki nedenleri açıklamalarını teşvik etmek amacıyla kullanılabilir.
- **Argüman üretmeye teşvik:** Öğrencilerin kendi matematiksel düşüncelerini yapılandırmaları ve savunmaları için bir zemin oluşturur.
- **Zorluk yaşadıklarında:** Öğrencilerin problem çözme sürecinde karşılaştıkları tikanıklıkları aşmalarına yardımcı olur, süreci yeniden yapılandırmalarını sağlar.
- **Farklı matematiksel argümanlar benimsendiğinde:** Öğrenciler arasında birden fazla geçerli yaklaşım ortaya çıktığında, bu farklılıkları keşfetmek ve karşılaştırmak amacıyla süreci derinleştirir.
- **Net olmayan durumlar:** Problemin çözümüne dair belirsizliklerin olduğu durumlarda, düşünmeyi yönlendiren ve açıklık sağlayan sorular olarak işlev görür.

Tablo-1. Farklı bağlamlarda tetikleyici soru örnekleri

Gerekçe Sorgulama	Argüman üretmeye teşvik etme	Zorluk yaşadıklarında	Farklı matematiksel argümanlar benimsendiğinde	Net olmayan durumlar
Gerekçelerini açıkla mısın?	Kullandığın argümanın güçlü ya da geliştirilmesi gereken yönleri nelerdir?	Nerede yanlış olduğunu düşünüyorsun?	İki argümanı kıyasla mısın? Güçlü ve geliştirilebilir yönlerini değerlendirir misin?	“Tekrar açıkla mısın? Tam anlayamadım”
Bunları düşünün sizin tanımınızı yeniden dinleyeceğiz.	Eleştireceğiniz veya katkı vereceğiniz bir yer var mı?	Zorlandığınızı kendi ifadeleriniz ile devam edebilirsiniz, fikirlerinizi sınırlamayın.		Ben bu ifadeyi anlamadım, sence neden anlamadım?
	Bu görevden başka hangi çıkarımlarda bulunabilirsin?			

Bunun yanı sıra, tetikleyici sorular öğrencilerin çeşitli akıl yürütme biçimlerini harekete geçirmek amacıyla da stratejik olarak kullanılabilir (Tablo-2): Bu bağlamda şu süreçlerin desteklenmesine katkı sağlar:

- **Analiz:** Öğrencilerin verilen bilgileri yapılarına ayırarak anlamlandırmalarını sağlar.
- **Varsayım oluşturma:** Problemin çözümünde kullanılabilecek olası durumları ortaya koymalarını destekler.
- **Genelleme:** Belirli durumlara ilişkin çıkarımların daha geniş matematiksel yapılara dönüştürülmesini teşvik eder.
- **Doğruluk:** İleri sürülen matematiksel ifadelerin geçerliliğini sorgulamalarına olanak tanır.
- **Gerekçelendirme:** Öğrencilerin ulaştıkları sonuçlara dair neden-sonuç ilişkileri kurarak açıklama yapmalarını sağlar.
- **Mantıksal argüman:** Düşüncelerini tutarlı ve mantıksal bir çerçevede sunmalarına olanak tanır.

Tablo-2. Sınıf Etkinlikleri İçin Tetikleyici Soru Örnekleri*

Analiz Tetikleyici Soruları

.....hakkında aynı ve farklı olan nedir?	Ne aynı kalır ne değişir?
Aşağıdakilerigöre sıralayın ve düzenleyin	Bir etkiyi görmek için yönünü değiştirin. Bunu değiştirirsek ne olacak?
Bundan sonra ne gelir?	 ile ilgili ne fark ettin?
Eğer.....o zaman.....	Sence bunu yaparsak bundan sonra ne olacak?

Varsayım Oluşturma ve Genelleme Tetikleyici Soruları

Buradaki örüntü nedir?	Bu ... (örüntü) her zaman işe yarar mı?
Genel olarak ne olur?	Kural nedir?
Bu kural uyan başka örnekler var mıdır?	Bu kuralı başka birine nasıl açıklarsın?

Doğruluk Tetikleyici Soruları

Bu doğru mu?	Bu bazen mi doğru, her zaman mı doğru?
Nasıl biliyorsun?	
Ne zaman doğru?	Nasıl biliyorsun?
Doğruluğunu nasıl gösterirsin/ispatlarsın?	Doğru veya yanlış? Neden? Düşünceni gerekçelendir!

Gerekçelendirme ve Mantıksal Argüman Tetikleyici Soruları

..... İle ilgili beni ikna et	ile ilgili nasıl emin olabiliriz?
.....nasıl biliyorsun?	ile ilgili yanlış giden konuyu açıkla
.....neden çalışıp/çalışmadığını açıkla	Bunun üzerinden adım adım geçebilir misin?

* Avusturalya Matematik Öğretmenleri Birliği (Australian Association of Mathematics Teachers) (2006). “Top drawer teachers, resources for teachers of mathematics.” <https://topdrawer.aamt.edu.au/Reasoning>

6. Rubrikler

Akıl yürütmeyi destekleyici bir sınıf ortamı oluşturma sürecinde öğretmenlere rehberlik etmek amacıyla hazırlanan bu kılavuzda, hem öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini analiz edebilmeleri hem de kendi öğretim uygulamalarını ve akıl yürütme yaklaşımlarını değerlendirebilmeleri için iki farklı rubrik sunulmuştur. Bunlardan ilki, öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini yapılandırma ve ifade etme biçimlerini değerlendirmeye yönelik olarak hazırlanmış Öğrencilerin Matematiksel Akıl Yürütmelerini Değerlendirme Formudur. İkincisi ise, öğretmenlerin sınıf içindeki eylemlerini gözden geçirmelerine ve kendi öğretmen rollerini akıl yürütmeyi destekleme bağlamında değerlendirmelerine olanak tanıyan Öğretmen Eylemleri Öz Değerlendirme Formudur. Bu rubrikler, öğretmenlerin hem öğrencilerin düşünme süreçlerine dair daha derin bir farkındalık geliştirmelerine hem de kendi uygulamalarını sistemli biçimde iyileştirmelerine katkı sağlamayı hedeflemektedir.

6.1. Öğrencilerin Matematiksel Akıl Yürütmelerini Değerlendirme Formu

Grubun Akıl Yürütmesine İlişkin Gözlem:				
	Analiz Etme	Genelleme	Gerekçeleştirme	Notlar
Belirgin Değil	Ortak bir özellik veya örüntü fark etmez.	Ortak bir özellik veya kural açıklamaz.	Gerekçeleştirme yapamaz.	
Başlangıç	- Rastgele/Gelişigüzel bir şekilde bilinen gerçekleri hatırlar. - Durumları ortak bir özelliğe göre ayırmaya çalışır. - Örüntüleri tekrarlar.	Ortak bir özellik veya kural açıklamaya çalışır.	- Ne yaptığını ve neden doğru olabileceğini veya olamayacağını tarif eder. - Argümanı tutarlı olmayabilir veya tüm adımları içermeyebilir.	
Gelişmekte Olan	- Ortak bir özellik fark eder, ortak bir özelliğe göre durumları sıralar ve sınıflandırır. - Örüntüleri tekrarlar ve genişletir. - Bir özellik veya örüntüyü tarif eder.	Geneller: Matematiksel terimleri kullanarak bir kural açıklar ve diğer durum ve örnekleri kaydeder.	- İfadelerin doğruluğunu onaylamaya çalışır ve tutarsızlıkları ve hataları tespit eder ve düzeltir. - Bir mantıksal argümandaki başlangıç ifadeleri doğrudur.	
Sağlamlaştırma	- Kural oluşturmak için sistematik olarak örnek arar, örüntüleri genişletir veya yapıları analiz eder. - Diğer durumlar hakkında tahminde bulunur.	Geneller: Matematiksel sembolleri kullanarak bir kuralı açıklar, kuralın ne anlama geldiğini açıklar ve örnek kullanarak kuralın nasıl çalıştığını anlatır.	- Her bir durumu doğrulayan ortak bir özellik, kural veya bilinen gerçekleri kullanarak ifadelerin doğruluğunu onaylar. - Aksine örnek vererek bir iddiayı reddeder. - Doğru bir mantıksal argüman kullanır.	
Genişleten	Ortak özellikler veya örüntüler arasındaki ilişkileri fark eder ve keşfeder.	- Matematiksel sembolleri kullanarak durumları, örüntüleri ve ortak özellikleri geneller ve kuralı uygular. - Aynı örüntü veya ortak özelliği tanımlamak için kullanılan farklı sembolik ifadeleri karşılaştırır.	- Oldukça matematiksel ve açıklanamayan hiçbir şey bırakmayan sağlam bir mantıksal argüman kullanır. - İfadenin doğru olduğunu veya genellemenin tüm durumlar için geçerli olduğunu mantıksal argüman kullanarak doğrular.	
Yorumlar (Geri Bildirim, Akıl Yürütmeyi Tetikleyen Sorular):				

6.2. Öğretmen Eylemleri Öz Değerlendirme Formu

Öğretmen Eylemleri (Teacher move category)	Öğretmen Eylemlerine Örnekler	Yeterli	Yeterli değil	Notlar
ÖE1				
Matematiksel kavramlara odaklanan toplu tartışmalar planlayın ve hazırlayın	Tartışmaları etkinleştirmek için uygun görevleri kullanın			
	Planlama sırasında öğrenci tepkilerini tahmin edin			
	Bireysel/grup çalışması sırasında öğrencilerin süreçlerini izleyin			
	Sunulan fikirleri bilerek seçin ve sıralayın			
	Tartışmaları epistemik işlevlerine göre yönetin			
ÖE2				
Öğrencilerin fikirlerini ve matematiğini anlayın ve ilişkilendirin; mümkün olduğunca çok öğrenci için erişilebilir hale getirin	Öğrencilerin düşüncelerinin ayrıntılarını keşfedin ve bilinçli tetikleyici sorular sorun			
	Yönlendirici sorular kullanın			
	Güveni teşvik edin			
	Duyarlı olun ve görevlerin zorluklarını öğrencilerin şu anki matematiksel ve dilsel yeteneklerine göre ayarlayın			
	Jestler, çizimler kullanın, temsilleri ilişkilendirin ve farklı dil çeşitleri ile destekleyin			
	Öğrencileri sorumlu konuşmacı rolünde tutun			
	Öğrencilerin konuşmalarını yeniden söyleyin			
	Epistemik talepleri açıklayın			
	Matematiksel bir fikri daha şeffaf bir şekilde temsil eden dili seçin			
ÖE3				
Matematik öğrenmek için dil uygulamalarını geliştirin	İletişimsel talepleri açıklayın			
	Öğrenci konuşmalarını yeniden söyleyin			
	Yeniden formüle edin, başka sözcüklerle ifade edin			
	Kendi kendine onarımı başlatın, açıklama / ayrıştırı isteyin			
	Yardımcı materyaller kullanın, farklı dil kullanımlarını ve temsilleri ilişkilendirin			
	Kelimelerini tamamlayın			
	Öğrencilerin konuşmalarını ortaya çıkarın			

ÖE4				
Matematik ile ilgili zorlu söylemlere katılımı teşvik edin	Sorgulayıcı soruları kullanın			
	Öğrencileri açıklamaya, tartışmaya, gerekçe göstermeye vb. davet edin			
	Her katkıyı teşvik etmektense daha çok öğrencilerin matematiksel fikirlerine odaklanın			
ÖE5				
Geri bildiriminize ve öğrencilerin matematik değerlendirmesine dikkat edin	Öğrencilerin fikirlerinin kalitesinin ortak incelenmesini vurgulayın; ortak kriterler oluşturun			
	Hataları ve ihmali olumlu ve geleceğe yönelik bir şekilde ele alın			
	Doğru öğrenci ifadelerini tekrarlayın			
	Kendi kendine onarımı teşvik edin			
ÖE6				
Duraklamaları ve sessizliği kasıtlı olarak kullanın	Öğrencilerin düşüncelerini ifade etmelerine izin vermek için duraklayın			
	Öğrencilerin katkılarını dinleyin			

7. Kaynakça

- Australian Association of Mathematics Teachers (AAMT). (2016). *Top drawer teachers, resources for teachers of mathematics*. Retrieved from <https://topdrawer.aamt.edu.au/Reasoning>
- Erath, K., Ingram, J., Moschkovich, J., & Prediger, S. (2021). Designing and enacting instruction that enhances language for mathematics learning: A review of the state of development and research. *ZDM Mathematics Education*, 53, 245–262. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01213-2>
- Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 361–372.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991) *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press. <http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511815355>
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95–124.
- Martino, A. M., & Maher, C. A. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: What research practice has taught us. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(1), 53–78. [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(99\)00017-6](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00017-6)
- Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 97–111. <https://doi.org/10.1080/002073900287426>
- Milli Eğitim Bakanlığı. (2018). *2018 Ortaöğretim Matematik Programı*. Ankara: Devlet Kitapları Basım Evi.
- Moyer, P. S., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: Categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(4), 293–315. <https://doi.org/10.1023/A:1021251912775>
- Mueller, M., Yankelwitz, D., & Maher, C. (2014). Teachers promoting student mathematical reasoning. *Investigations in Mathematics Learning*, 7(2), 1–20. <https://doi.org/10.1080/24727466.2014.11790339>

- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D. & Fishbein, B. (2020). *TIMSS 2019 international results in mathematics and science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. Retrieved from <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/international-results/>
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944>
- Sierpinska, A. (2005). On Practical and Theoretical Thinking and Other False Dichotomies in Mathematics Education. In Hoffmann, M.H., Lenhard, J., Seeger, F. (Eds) *Activity and Sign*. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/0-387-24270-8_11
- Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227–236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.